

9.4 Coordenadas polares y gráficas en polares

Coordenadas polares

Hasta ahora, hemos representado las gráficas como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones de estas gráficas se han dado en forma rectangular o paramétrica. En esta sección, introduciremos un sistema de coordenadas denominado **sistema de coordenadas polares**.

Para construir el sistema de coordenadas polares en el plano, fijamos un punto O, llamado el **polo** (o el **origen**), y trazamos desde O un rayo inicial llamado el **eje polar** (Figura 9.34). Entonces, se puede asignar a cada punto en el plano unas **coordenadas polares** (r, θ), como sigue.

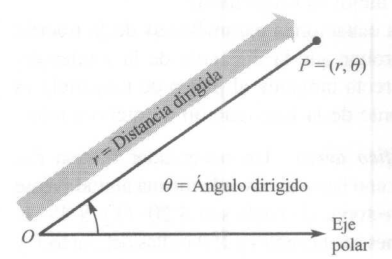


FIGURA 9.34
Coordenadas polares.

r = *distancia dirigida* de O a P

θ = *ángulo dirigido*, en sentido antihorario, del eje polar al segmento $\overline{OP}$

La Figura 9.35 muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Observemos que, en este sistema, es conveniente localizar los puntos respecto a un retículo de circunferencias concéntricas y **rectas radiales** que pasan por el polo.

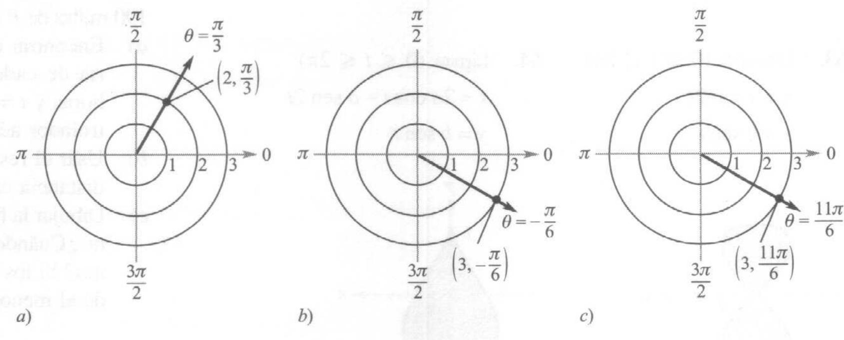


FIGURA 9.35

COORDENADAS POLARES

El matemático a quien se atribuyó el haber empleado por primera vez las coordenadas polares fue James Bernoulli, que las introdujo en 1691. No obstante, existe cierta evidencia de que Isaac Newton pudo haberlas utilizado con anterioridad.

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no ocurre en coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas (r, θ) y $(r, 2\pi + \theta)$ representan un mismo punto [véase *b*) y *c*) en la Figura 9.35]. Asimismo, como r es una distancia dirigida, las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan un mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede expresarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$

o como

$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

siendo n un entero arbitrario. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

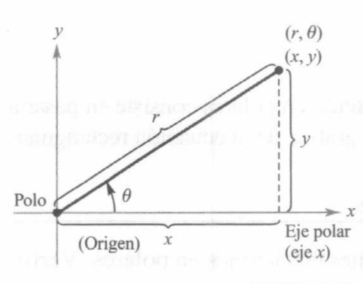


FIGURA 9.36
Relación entre coordenadas polares y rectangulares.

Cambio de coordenadas

Para establecer la relación entre las coordenadas polares y las rectangulares, hagamos coincidir el eje polar con el semieje x positivo y el polo con el origen, según muestra la Figura 9.36. Puesto que (x, y) está sobre una circunferencia de radio r, se sigue que $r^2 = x^2 + y^2$. Además, para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

El lector puede comprobar que si $r < 0$, se verifican las mismas relaciones.

TEOREMA 9.10 CAMBIO DE COORDENADAS

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con sus coordenadas rectangulares (x, y) por

1. $x = r\cos\theta$ — $y = r\operatorname{sen}\theta$
2. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$ — $r^2 = x^2 + y^2$

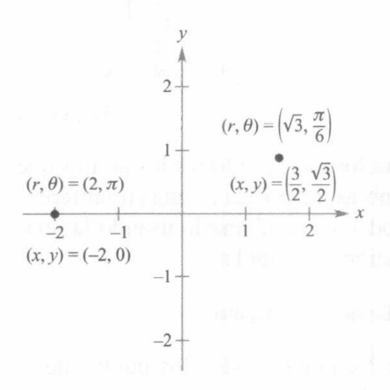


FIGURA 9.37
Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, hacemos $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$.

EJEMPLO 1 Cambio de coordenadas polares a rectangulares

a) Para el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r\cos\theta = 2\cos\pi = -2 \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\pi = 0$$

Así pues, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$.

b) Para el punto $(r, \theta) = (\sqrt{3}, \pi/6)$,

$$x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Véase Figura 9.37.)}$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (3/2, \sqrt{3}/2)$. □

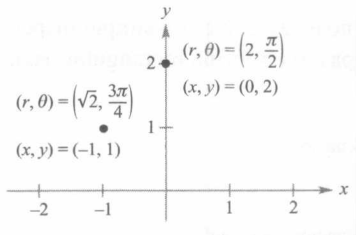


FIGURA 9.38
Para pasar de coordenadas rectangulares a polares hacemos $\operatorname{tg}\theta = y/x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

EJEMPLO 2 Cambio de coordenadas rectangulares a polares

a) Para el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

Dado que θ se ha escogido en el mismo cuadrante que (x, y), debemos tomar un valor de r positivo.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \quad \text{(Véase Figura 9.38.)} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esto implica que *un* conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

b) Como el punto $(x, y) = (0, 2)$ está en el eje y positivo, elegimos $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, de modo que un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$. □

Representar *a mano* las gráficas de ecuaciones en polares complicadas puede resultar tedioso. La tecnología, sin embargo, alivia esta tarea. Si puede disponer de un programa gráfico en modo polar, intente utilizarlo para representar las gráficas de la colección de ejercicios. Si su calculadora no está provista de un modo polar, pero sí de un modo paramétrico, puede dibujar la gráfica de $r = f(\theta)$ expresando la ecuación como

$$x = f(\theta)\cos\theta$$
$$y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Por ejemplo, la gráfica de $r = \frac{1}{2}\theta$, que se muestra en la Figura 9.40, se obtuvo con una calculadora gráfica en modo paramétrico. Para representar la gráfica, introdujimos las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{1}{2}\theta\cos\theta$$
$$y = \frac{1}{2}\theta\,\text{sen}\,\theta$$

e hicimos variar θ de -4π a 4π. Esta curva es de la forma $r = a\theta$, y recibe el nombre de **espiral de Arquímedes**.

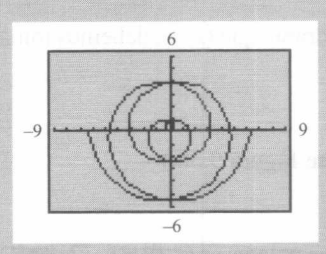


FIGURA 9.40
Espiral de Arquímedes.

Gráficas en polares

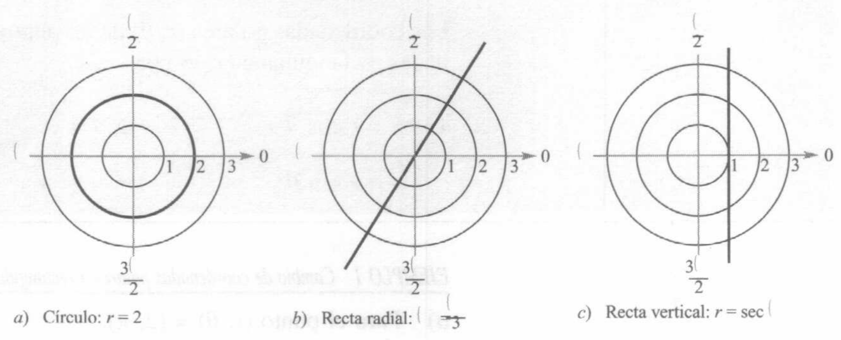
Una forma de representar la gráfica de una ecuación en polares consiste en pasar a coordenadas rectangulares y después dibujar la gráfica de la ecuación rectangular.

EJEMPLO 3 Representación gráfica de ecuaciones en polares

Describir la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en polares. Verificar cada descripción pasando a una ecuación rectangular.

a) $r = 2$ *b)* $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ *c)* $r = \sec\theta$

Solución: (Véase Figura 9.39.)



a) Círculo: $r = 2$ *b)* Recta radial: $\theta = \frac{\pi}{3}$ *c)* Recta vertical: $r = \sec\theta$

FIGURA 9.39

a) La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ está formada por todos los puntos que distan 2 unidades del polo. En otras palabras, la gráfica es una circunferencia de radio 2 centrada en el origen. Podemos confirmarlo usando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 2^2 \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

b) La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ contiene todos los puntos de la semirrecta radial que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo. Podemos confirmarlo usando la relación $\text{tg}\,\theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}x \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

c) La gráfica de la ecuación polar $r = \sec\theta$ no es evidente por simple inspección, por lo que podemos comenzar por pasarla a forma rectangular usando la relación $r\cos\theta = x$.

$$r = \sec\theta \qquad \text{Ecuación polar}$$
$$r\cos\theta = 1$$
$$x = 1 \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

A la vista de la ecuación rectangular, deducimos que la gráfica es una recta vertical. □

EJEMPLO 4 Representación de una gráfica en polares

Con ayuda de una calculadora, representar la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$.

Solución: Comenzamos por escribir la ecuación en forma paramétrica.

$$x = 2\cos 3\theta \cos\theta \quad \text{e} \quad y = 2\cos 3\theta \,\text{sen}\,\theta$$

Tras algunos ensayos, encontramos que la curva completa, que se llama **curva rosa** (o simplemente **rosa**), puede dibujarse haciendo variar θ de 0 a π, como muestra la Figura 9.41. Si intenta reproducir esta gráfica con una calculadora, encontrará que, al hacer variar θ de 0 a 2π, lo que ocurre realmente es que la curva se recorre *dos veces*.

Nota. Un método para representar a mano la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$ consiste en confeccionar una tabla de valores

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	2	0	−2	0	2

Extendiendo la tabla y marcando los puntos, obtendrá la curva del Ejemplo 4.

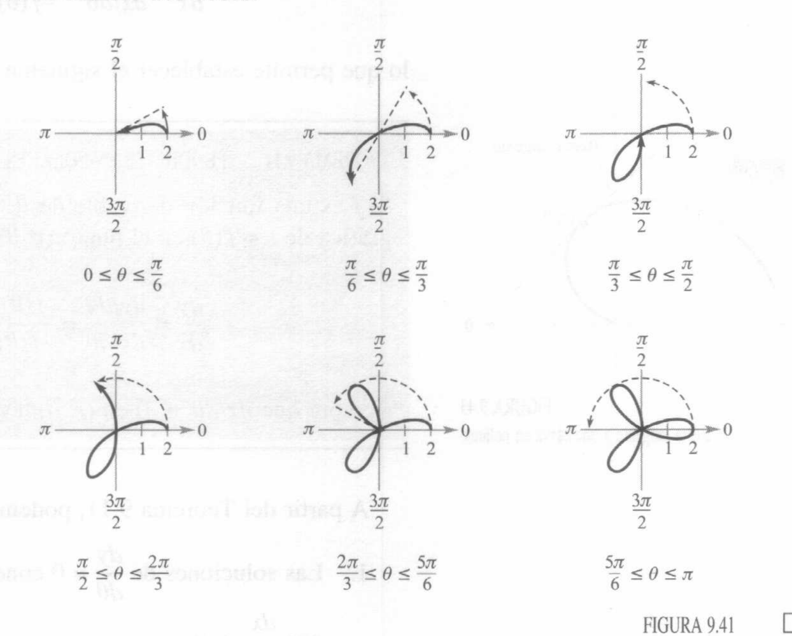
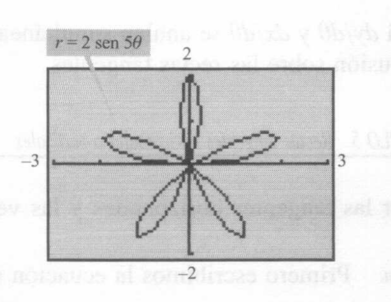


FIGURA 9.41 □

Si tiene acceso a algún programa gráfico, trate de usarlo para experimentar con otras rosas (son de la forma $r = a\cos n\theta$ o $r = a\,\text{sen}\,n\theta$). Por ejemplo, la Figura 9.42 muestra las gráficas de otras dos rosas.



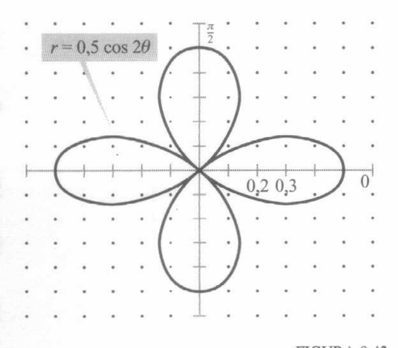


FIGURA 9.42
Rosas.

Pendiente y rectas tangentes

Para determinar la pendiente de una recta tangente a una gráfica en polares, consideremos una función derivable $r = f(\theta)$. Para pasar a polares, utilizamos las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen} \theta = f(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

Usando la forma paramétrica de *dy/dx* dada en el Teorema 9.7, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \operatorname{sen} \theta}{-f(\theta) \operatorname{sen} \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

lo que permite establecer el siguiente teorema.

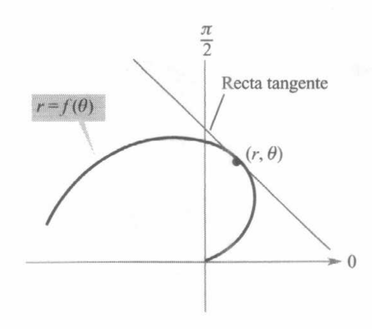


FIGURA 9.43
Recta tangente a una curva en polares.

TEOREMA 9.11 PENDIENTE EN POLARES

Si f es una función derivable de θ, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \operatorname{sen} \theta}{-f(\theta) \operatorname{sen} \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ). (Véase Figura 9.43.)

A partir del Teorema 9.11, podemos hacer las siguientes observaciones.

1. Las soluciones de $\frac{dy}{d\theta} = 0$ conducen a tangentes horizontales, siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$.
2. Las soluciones de $\frac{dx}{d\theta} = 0$ conducen a tangentes verticales, siempre que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Si $dy/d\theta$ y $dx/d\theta$ se anulan simultáneamente, no se puede extraer ninguna conclusión sobre las rectas tangentes.

EJEMPLO 5 Rectas tangentes horizontales o verticales

Hallar las tangentes horizontales y las verticales de $r = \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Solución: Primero escribimos la ecuación en forma paramétrica.

$$x = r \cos \theta = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$$

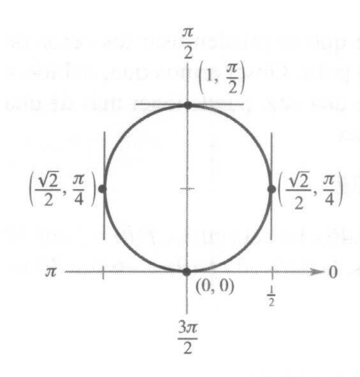


FIGURA 9.44
Tangentes horizontales y verticales de $r = \text{sen } \theta$.

A continuación, derivamos x e y con respecto a θ e igualamos a 0 cada derivada.

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = \cos 2\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta = \text{sen } 2\theta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la gráfica posee tangentes verticales en $(\sqrt{2}/2, \pi/4)$ y $(\sqrt{2}/2, 3\pi/4)$, y tangentes horizontales en (0, 0) y $(1, \pi/2)$, como vemos en la Figura 9.44. □

EJEMPLO 6 Rectas tangentes horizontales o verticales

Hallar las tangentes horizontales y las verticales a la gráfica de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Solución: Derivamos $y = r \text{ sen } \theta$ e igualamos $dy/d\theta$ a 0:

$$y = r \text{ sen } \theta = 2(1 - \cos \theta) \text{ sen } \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2[(1 - \cos \theta)(\cos \theta) + \text{sen } \theta(\text{sen } \theta)]$$

$$= -2(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

Entonces, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos \theta = 1$, y podemos concluir que $dy/d\theta = 0$ en $\theta = 2\pi/3$, $4\pi/3$ y 0. Análogamente, usando $x = r \cos \theta$, se tiene

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \text{ sen } \theta + 4 \cos \theta \text{ sen } \theta = 2 \text{ sen } \theta(2 \cos \theta - 1) = 0$$

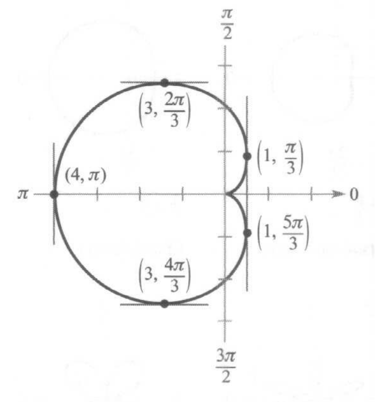


FIGURA 9.45
Tangentes horizontales y verticales de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Así pues, $\text{sen } \theta = 0$ o $\cos \theta = \frac{1}{2}$, luego $dx/d\theta = 0$ en $\theta = 0, \pi, \pi/3$ y $5\pi/3$. De estos resultados y de la Figura 9.45, concluimos que la gráfica tiene tangentes horizontales en $(3, 2\pi/3)$ y $(3, 4\pi/3)$, y tangentes verticales en $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$ y $(4, \pi)$. Esta gráfica recibe el nombre de **cardioide**. Observemos que las dos derivadas ($dy/d\theta$ y $dx/d\theta$) se anulan en $\theta = 0$. A partir de esta única información no podemos saber si la gráfica tiene tangente horizontal o vertical en el polo. En la Figura 9.45, sin embargo, vemos que la gráfica tiene un punto cúspide (o punto anguloso) en el polo. □

El Teorema 9.11 tiene una importante consecuencia. Supongamos que la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo cuando $\theta = \alpha$ y que $f'(\alpha) \neq 0$. Entonces, la fórmula de dy/dx se simplifica como sigue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha) \text{ sen } \alpha + f(\alpha) \cos \alpha}{f'(\alpha) \cos \alpha - f(\alpha) \text{ sen } \alpha} = \frac{f'(\alpha) \text{ sen } \alpha + 0}{f'(\alpha) \cos \alpha - 0} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \text{tg } \alpha$$

Por consiguiente, la recta $\theta = \alpha$ es tangente a la gráfica en el polo $(0, \alpha)$.

TEOREMA 9.12 RECTAS TANGENTES EN EL POLO

Si $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$, la recta $\theta = \alpha$ es tangente en el polo a la gráfica de $r = f(\theta)$.

El Teorema 9.12 es útil porque establece que se pueden usar los ceros de $r = f(\theta)$ para hallar las rectas tangentes en el polo. Observemos que, debido a que una curva puede pasar por el polo más de una vez, puede tener más de una recta tangente en el polo. Por ejemplo, la rosa

$$f(\theta) = 2 \cos 3\theta$$

posee tres rectas tangentes en el polo (Figura 9.46). En esta curva, $f(\theta) = 2 \cos 3\theta$ se anula cuando θ es $\pi/6$, $\pi/2$ y $5\pi/6$. Además, la derivada $f'(\theta) = -6 \text{ sen } 3\theta$ no es 0 para estos valores de θ.

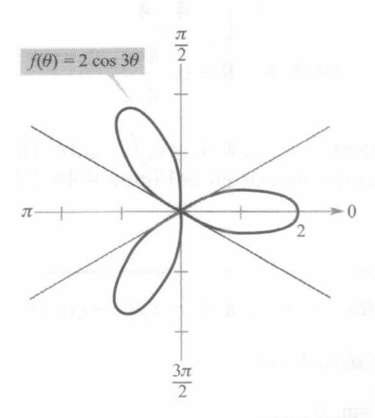


FIGURA 9.46
Esta rosa tiene tres rectas tangentes ($\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = 5\pi/6$) en el polo.

Gráficas en polares especiales

Varios tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más sencillas en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia de radio a centrada en el origen es simplemente $r = a$. Más adelante llegaremos a apreciar esta ventaja. Por ahora, resumiremos otros tipos de gráficas cuyas ecuaciones son más sencillas en forma polar. (Las cónicas se considerarán en la Sección 9.6.)

Caracoles

$r = a \pm b \cos \theta$

$r = a \pm b \text{ sen } \theta$

$(a > 0,\ b > 0)$

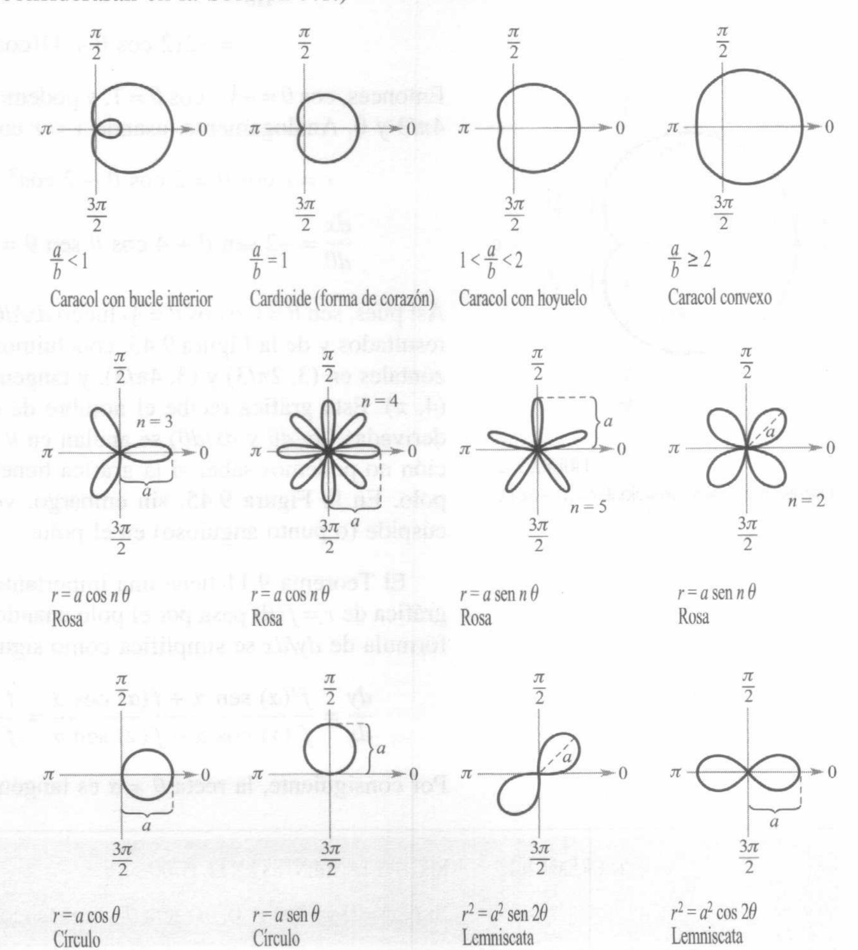
Rosas

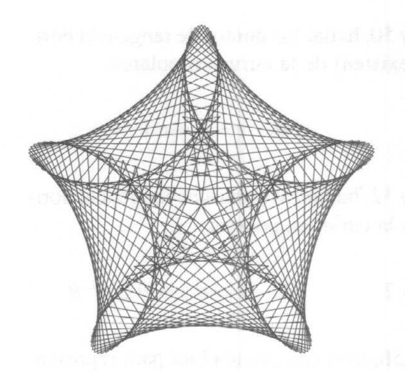
n pétalos si n es impar

$2n$ pétalos si n es par

$(n \geqslant 2)$

Círculos y lemniscatas





Las rosas descritas anteriormente son de la forma $r = a \cos n\theta$, o $r = a$ sen $n\theta$, donde n es un entero mayor o igual que 2. Intente representar con una calculadora la gráfica de $r = a \cos n\theta$ o de $r = a$ sen $n\theta$ para algunos valores no enteros de n. ¿Son también rosas estas gráficas? Por ejemplo, trate de representar la gráfica de $r = \cos \frac{2}{3}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$.

PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre las rosas y otras curvas relacionadas véase el artículo «A Rose is a Rose...» de Peter M. Maurer, publicado en *The American Mathematical Monthly*, agosto-septiembre de 1987. (La gráfica adjunta, generada por ordenador, es el resultado de un algoritmo que Maurer llama «La Rosa».)

Ejercicios de la Sección 9.4

En los Ejercicios 1-6, representar el punto dado en coordenadas polares y hallar las coordenadas cartesianas correspondientes.

1. $(4, 3\pi/6)$ **2.** $(-1, 5\pi/4)$

3. $(-4, -\pi/3)$ **4.** $(0, -7\pi/6)$

5. $(\sqrt{2}, 2{,}36)$ **6.** $(-3, -1{,}57)$

En los Ejercicios 7-10, utilizar una calculadora para encontrar las coordenadas cartesianas del punto dado en coordenadas polares. Representar el punto.

7. $(5, 3\pi/4)$ **8.** $(-2, 11\pi/6)$

9. $(-3{,}5, 2{,}5)$ **10.** $(8{,}25, 1{,}3)$

En los Ejercicios 11-14 se dan las coordenadas cartesianas de un punto. Representar el punto y determinar *dos* pares de coordenadas polares del mismo con $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

11. $(1, 1)$ **12.** $(0, -5)$

13. $(-3, 4)$ **14.** $(3, -1)$

En los Ejercicios 15-18, usar una calculadora para hallar unas coordenadas polares del punto dado en coordenadas cartesianas.

15. $(3, -2)$ **16.** $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

17. $(\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$ **18.** $(0, -5)$

19. Representar el punto $(4, 3{,}5)$ si está dado en coordenadas *a*) cartesianas y *b*) polares.

20. ***Razonamiento gráfico***

a) Usando coordenadas cartesianas en la pantalla de una calculadora, situar el cursor en cualquier punto fuera de los ejes. Desplazarlo horizontalmente y describir los cambios que experimentan las coordenadas mostradas de los puntos. Repetir el proceso desplazando el cursor verticalmente.

b) Repetir el apartado *a*), usando coordenadas polares en la pantalla de la calculadora.

c) ¿Por qué son diferentes los resultados de *a*) y *b*)?

En los Ejercicios 21-28, pasar la ecuación rectangular a forma polar y esbozar su gráfica.

21. $x^2 + y^2 = a^2$ **22.** $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

23. $y = 4$ **24.** $x = 10$

25. $3x - y + 2 = 0$ **26.** $xy = 4$

27. $y^2 = 9x$ **28.** $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

En los Ejercicios 29-36, pasar la ecuación polar a forma rectangular y esbozar su gráfica.

29. $r = 3$ **30.** $r = -2$

31. $r = \text{sen}\, \theta$ **32.** $r = 3 \cos \theta$

33. $r = \theta$ **34.** $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

35. $r = 3 \sec \theta$ **36.** $r = 2 \operatorname{cosec} \theta$

37. Pasar la ecuación

$$r = 2(h \cos \theta + k \,\text{sen}\, \theta)$$

a forma rectangular y comprobar que corresponde a una circunferencia. Hallar el radio y las coordenadas cartesianas del centro.

38. *Fórmula de la distancia*

a) Verificar que la fórmula de la distancia entre los dos puntos en coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

b) Describir la posición relativa de los puntos si $\theta_1 = \theta_2$. Simplificar la fórmula de la distancia para este caso. ¿Es la simplificación esperada? Explicar la respuesta.

c) Simplificar la fórmula de la distancia para $\theta_1 - \theta_2 = 90°$. ¿Es la simplificación esperada? Explicar la respuesta.

d) Seleccionar dos puntos del sistema de coordenadas polares y hallar la distancia entre ellos. Después, escoger representaciones polares distintas de los mismos puntos y aplicar de nuevo la fórmula de la distancia. Discutir el resultado.

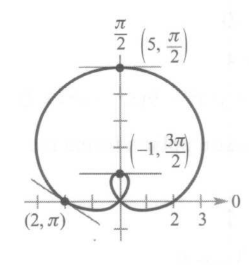
En los Ejercicios 39-42, usar el resultado del Ejercicio 38 para estimar la distancia entre los dos puntos dados en coordenadas polares.

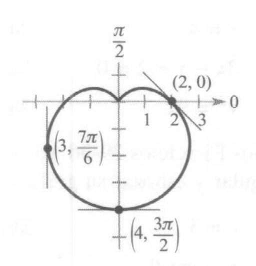
39. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right), \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ **40.** $\left(10, \frac{7\pi}{6}\right), (3, \pi)$

41. (2, 0,5), (7, 1,2) **42.** (4, 2,5), (12, 1)

En los Ejercicios 43 y 44, hallar *dy/dx* y las pendientes de las rectas tangentes mostradas en la gráfica de la ecuación en polares.

43. $r = 2 + 3 \text{ sen } \theta$ **44.** $r = 2(1 - \text{sen } \theta)$





En los Ejercicios 45-48, usar una calculadora para *a*) representar gráficamente la ecuación, *b*) trazar la recta tangente en el valor de θ dado, y *c*) hallar *dy/dx* en ese valor de θ. (*Ayuda:* Tomar el incremento de los valores de θ igual a $\pi/24$.)

45. $r = 3(1 - \cos \theta), \theta = \frac{\pi}{2}$ **46.** $r = 3 - 2 \cos \theta, \theta = 0$

47. $r = 3 \text{ sen } \theta, \theta = \frac{\pi}{3}$ **48.** $r = 4, \theta = \frac{\pi}{4}$

En los Ejercicios 49 y 50, hallar los puntos de tangencia horizontal y vertical (si existen) de la curva en polares.

49. $r = 1 + \text{sen } \theta$ **50.** $r = a \text{ sen } \theta$

En los Ejercicios 51 y 52, hallar los puntos de tangencia horizontal (si existen) de la curva en polares.

51. $r = 2 \text{ cosec } \theta + 3$ **52.** $r = a \text{ sen } \theta \cos^2 \theta$

En los Ejercicios 53-56, usar una calculadora para representar gráficamente la ecuación y hallar todos los puntos de tangencia horizontal.

53. $r = 4 \text{ sen } \theta \cos^2 \theta$ **54.** $r = 3 \cos 2\theta \sec \theta$

55. $r = 2 \text{ cosec } \theta + 5$ **56.** $r = 2 \cos(3\theta - 2)$

En los Ejercicios 57-62 esbozar la gráfica de la ecuación y determinar las tangentes en el polo.

57. $r = 3 \text{ sen } \theta$ **58.** $r = 3(1 - \cos \theta)$

59. $r = 2 \cos 3\theta$ **60.** $r = -\text{sen } 5\theta$

61. $r = 3 \text{ sen } 2\theta$ **62.** $r = 3 \cos 2\theta$

En los Ejercicios 63-70, esbozar la gráfica de la ecuación.

63. $r = 3 - 2 \cos \theta$ **64.** $r = 5 - 4 \text{ sen } \theta$

65. $r = 3 \text{ cosec } \theta$ **66.** $r = \frac{6}{2 \text{ sen } \theta - 3 \cos \theta}$

67. $r = 2\theta$ **68.** $r = \frac{1}{\theta}$

69. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ **70.** $r^2 = 4 \text{ sen } \theta$

En los Ejercicios 71-80, representar en una calculadora la gráfica de la ecuación. Hallar un intervalo de valores de θ sobre el cual la gráfica se recorra sólo una vez.

71. $r = 3 - 4 \cos \theta$ **72.** $r = 2(1 - 2 \text{ sen } \theta)$

73. $r = 2 + \text{sen } \theta$ **74.** $r = 4 + 3 \cos \theta$

75. $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ **76.** $r = \frac{2}{4 - 3 \text{ sen } \theta}$

77. $r = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$ **78.** $r = 3 \text{ sen}\left(\frac{5\theta}{2}\right)$

79. $r^2 = 4 \text{ sen } 2\theta$ **80.** $r^2 = \frac{1}{\theta}$

En los Ejercicios 81-84, representar en una calculadora la gráfica de la ecuación y probar que la recta indicada es una asíntota de la gráfica.

	Nombre de la gráfica	*Ecuación polar*	*Asíntota*
81.	Concoide	$r = 2 - \sec\theta$	$x = -1$
82.	Concoide	$r = 2 + \operatorname{cosec}\theta$	$y = 1$
83.	Espiral hiperbólica	$r = 2/\theta$	$y = 2$
84.	Estrofoide	$r = 2\cos 2\theta \sec\theta$	$x = -2$

85. Esbozar la gráfica de $r = 4$ sen θ en cada intervalo.

a) $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ *b)* $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$ *c)* $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

86. ***Para pensar*** Utilizando una calculadora, representar gráficamente la ecuación $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para *a)* $\phi = 0$, *b)* $\phi = \pi/4$ y *c)* $\phi = \pi/2$. Usar las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ. Escribir la ecuación en función de sen θ en el apartado *c)*.

87. Comprobar que si se gira la curva de ecuación $r = f(\theta)$ un ángulo ϕ alrededor del polo, la curva resultante admite la ecuación $r = f(\theta - \phi)$.

88. Si la ecuación en polares de una curva es de la forma $r = f(\text{sen}\ \theta)$, demostrar que la ecuación pasa a ser de la forma:

a) $r = f(-\cos\theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de $\pi/2$ radianes en sentido antihorario.

b) $r = f(-\text{sen}\ \theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de π radianes en sentido antihorario.

c) $r = f(\cos\theta)$ si se efectúa sobre la curva una rotación alrededor del polo de $3\pi/2$ radianes en sentido antihorario.

En los Ejercicios 89-92, aplicar los resultados de los Ejercicios 87 y 88.

89. Escribir una ecuación para el caracol $r = 2 -$ sen θ una vez ha girado el ángulo indicado. Verificar los resultados representando en una calculadora el caracol girado.

a) $\frac{\pi}{4}$ *b)* $\frac{\pi}{2}$ *c)* π *d)* $\frac{3\pi}{2}$

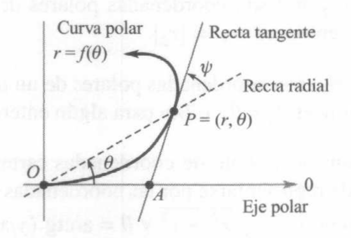
90. Escribir una ecuación para la rosa $r = 2$ sen 2θ una vez ha girado el ángulo indicado. Verificar los resultados representando en una calculadora la rosa girada.

a) $\frac{\pi}{6}$ *b)* $\frac{\pi}{2}$ *c)* $\frac{2\pi}{3}$ *d)* π

91. Esbozar la gráfica de cada ecuación

a) $r = 1 - \text{sen}\ \theta$ *b)* $r = 1 - \text{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

92. Demostrar que la tangente del ángulo $\psi (0 \leqslant \psi \leqslant \pi/2)$ entre la recta radial y la recta tangente en el punto (r, θ) de la gráfica de $r = f(\theta)$ (véase figura) viene dada por tg $\psi = |r/(dr/d\theta)|$.



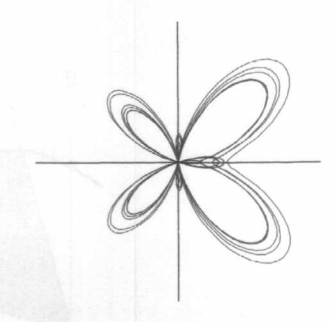
En los Ejercicios 93-98, usar el resultado del Ejercicio 92 para hallar el ángulo ψ entre las rectas radial y tangente a la gráfica para el valor de θ indicado. Usando una calculadora, representar gráficamente la ecuación en polares, la recta radial y la recta tangente para el valor de θ indicado. Identificar el ángulo ψ.

	Ecuación polar	*Valor de θ*
93.	$r = 2(1 - \cos\theta)$	$\theta = \pi$
94.	$r = 3(1 - \cos\theta)$	$\theta = 3\pi/4$
95.	$r = 2\cos 3\theta$	$\theta = \pi/6$
96.	$r = 4$ sen 2θ	$\theta = \pi/6$
97.	$r = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$	$\theta = 2\pi/3$
98.	$r = 5$	$\theta = \pi/6$

99. ***La curva mariposa*** Con ayuda de una calculadora, obtener la curva mostrada abajo, de ecuación

$$r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \text{sen}^5 \frac{\theta}{12}$$

¿En qué intervalo debe variar θ para producir la curva?



PARA MÁS INFORMACIÓN Sobre esta curva, puede consultarse el artículo «A Study in Step Size», de Temple H. Fay, en *Mathematics Magazine*, abril de 1997.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 100-103, determinar si la afirmación es correcta. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre su falsedad.

100. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $|r_1| = |r_2|$.

101. Si (r, θ_1) y (r, θ_2) son coordenadas polares de un mismo punto, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n.

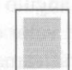
102. Si $x \geqslant 0$ entonces el punto de coordenadas cartesianas (x, y) puede representarse por las coordenadas polares (r, θ), siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \text{arctg } (y/x)$.

103. Las ecuaciones en polares $r = \text{sen } 2\theta$ y $r = -\text{sen } 2\theta$ tienen la misma gráfica.

104. ***De corazón a campana*** Usando una calculadora, representar la ecuación

$$r = \cos 5\theta + n \cos \theta$$

para $0 \leqslant \theta < \pi$ y los enteros $n = -5$ a $n = 5$. ¿Qué valores de n producen el «corazón» de la curva? ¿Qué valores de n producen la «campana»? Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, apareció en el número de enero de 1994 de *The College Mathematics Journal*.



9.5 Área y longitud de arco en coordenadas polares

CONTENIDO ▪
Área de una región en polares ▪
Puntos de intersección de gráficas en polares ▪
Longitud de arco en polares ▪
Área de una superficie de revolución ▪

Área de una región en polares

El proceso que culmina en una fórmula para el área de una región polar es paralelo al del área en coordenadas cartesianas, pero utiliza *sectores* circulares en lugar de rectángulos como elementos básicos. Observemos, en la Figura 9.47, que el área de un sector circular de radio r viene dada por $\frac{1}{2}\,\theta r^2$, en el supuesto de que θ se mida en radianes.

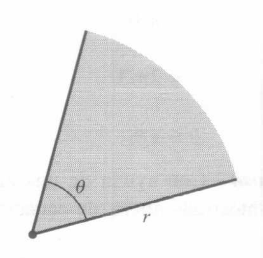


FIGURA 9.47
El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}\,\theta r^2$.

Consideremos la ecuación $r = f(\theta)$, con f continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$. La Figura 9.48 muestra la región acotada por la gráfica y por las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. Para hallar el área de esta región, dividimos el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales.

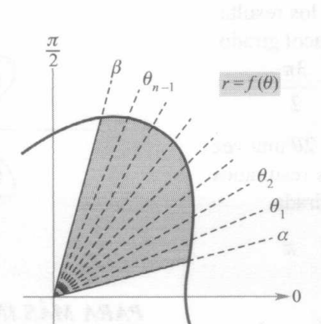
$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

Aproximamos el área de la región por la suma de las áreas de los n sectores.

$$\text{Radio del } i\text{-ésimo sector} = f(\theta_i)$$

$$\text{Ángulo central del } i\text{-ésimo sector} = \frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$



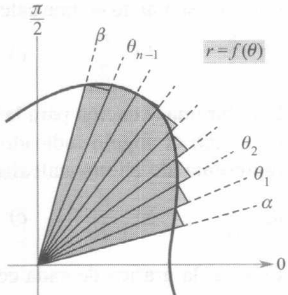


FIGURA 9.48